TEMA 13 – LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

13.1 – INTEGRAL DEFINIDA

APROXIMACIÓN DEL AREA BAJO UNA CURVA

Suma inferior (mi = mínimo) Suma superior (Mi = máximo)

$$s = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 \quad \leq \quad A \quad \leq \quad S = (x_1 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2$$

Si aumentamos el número de trozos, la diferencia será cada vez menor.

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i.(x_i - x_{i-1}) \quad \leq \quad A \quad \leq \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1})$$

Si el número de trozos es infinito: La suma inferior = A = suma superior (m_i=M_i=f(x_i))

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

Por tanto la integral definida entre los puntos x = a x = b nos da el área de la región limitada entre la curva en el eje de abscisas entre los puntos a y b.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

[1] $\int_a^a f(x)dx = 0$

[2] $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

[3] Signo de la integral:

- Si f(x) > 0 y continua en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$
- Si f(x) < 0 y continua en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx < 0$

[4] Si a < b < c y f es continua en [a,b] $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

[5] Si f(x) ≤ g(x) en cada x ∈ [a,b] $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

OPERACIONES CON INTEGRALES DEFINIDAS

[1] Suma o resta: $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

[2] Multiplicación por un escalar: $\int_a^b kf(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$

TEOREMAS DE INTEGRACIÓN

[1] Teorema del valor medio del cálculo integral.

Sea f una función continua en [a,b] $\Rightarrow \exists$ c ∈ [a,b] tal que: $\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$

[2] Teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en [a,b] $\Rightarrow$ La función F(x) = $\int_a^x f(x)dx$, x ∈ [a,b] es derivable, y se verifica que F´(x) = f(x)

[3] Regla de Barrow

Si f(x) es continua en [a,b] y F(x) es una primitiva suya, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad \ni \; F'(x) = f(x)$$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

[1] Cálculo del área encerrada entre una curva y el eje OX entre x = a y x = b

- Si $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$
  $A = \int_a^b f(x)dx$

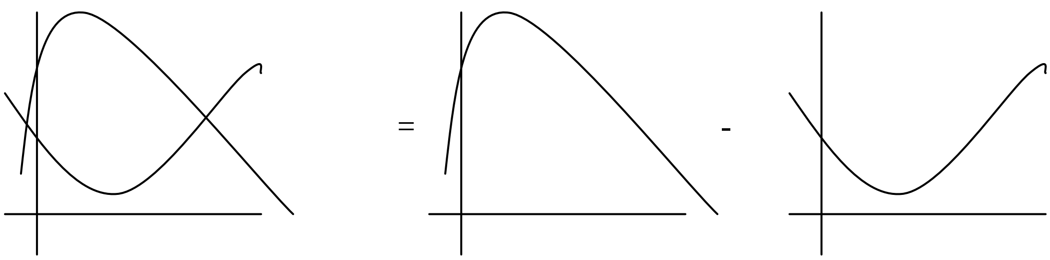
- Si $f(x) < 0$, $x \in [a,b]$
  $A = -\int_a^b f(x)dx$

- Si f(x) cambia de signo en [a,b]
  $x \in [a,c]$ $f(x) \geq 0$
  $x \in [c,b]$ $f(x) < 0$

  $A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$

- <u>Cálculo</u>:
  - Hallar los puntos de corte de la función con el eje OX (y = 0)
  - Hallar una tabla de valores entre los puntos de corte
  - Representar la función (extremos relativos, puntos de inflexión)
  - Hallar la integral, teniendo en cuenta cuando la función está por encima del eje y cuando por debajo.

[2] Cálculo del área encerrada entre varias curvas



$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Es decir, la integral definida entre la resta de la función que esta por encima menos la que está por debajo entre los puntos de corte de ambas.

- <u>Cálculo</u>:
  - Puntos de corte entre las dos funciones. Resolver el sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$
  - Hallar una tabla de valores entre los puntos de corte
  - Representar cada función (extremos relativos, puntos de inflexión)
  - Hallar la integral, cual es la función que está por encima y cuál es la que está por debajo.

[3] Volumen de un cuerpo de revolución

Un trozo de curva $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, se hace girar alrededor del eje X engendrando un cuerpo de revolución cuyo volumen queremos calcular.

La rodaja señalada en la figura tiene por volumen:

$$\Pi\, f(c_i)^2\,(x_i - x_{i-1})$$

El volumen de este cuerpo es, aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi\, f(c_i)^2\,(x_i - x_{i-1})$$

Pasando al límite obtenemos el valor exacto mediante una integral:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$